videowissen

Formel der Woche

Nr. 20

$$v = v_0 \ln \frac{M_S}{M}$$

Raumsonde mit Ionenantrieb
(Lösung der Aufgabe)

Klassische Raketengleichung

$$\boxed{v = v_0 \ln\left(\frac{M_S}{M}\right)}$$

- M_S – Startmasse der Rakete
- M – augenblickliche Masse der Rakete
- v_0 – Geschwindigkeit des Treibstoffs
- v – augenblickliche Geschwindigkeit der Rakete

Aufgabe zum Nachdenken / Kommentieren

Raumsonde mit Ionen-Antrieb

- Startmasse: $M_S = 10t$
- Endmasse (Nutzlast): $M = 1t$
- Treibstoffgeschwindigkeit: $v_0 \approx 50\ km/s$
- Schubkraft: $F = 100\ mN$

- Aufgabe: Berechne Endgeschwindigkeit v, Brenndauer T und zurückgelegten Weg s !

Endgeschwindigkeit v

- Treibstoff komplett verbraucht $\rightarrow$ Restmasse $=$ Nutzlast

$$v = v_0 \ln\left(\frac{M_S}{M}\right) = 50\ km/s \cdot \ln\left(\frac{10t}{1t}\right)$$

$$v \approx 50\ km/s \cdot 2{,}3 = \mathbf{115\ km/s}$$

Brenndauer T

- Schubkraft: $F = v_0 \cdot \dot{M}$ $\quad\rightarrow$ Treibstoffverbrauch

$$\dot{M} = \frac{F}{v_0} = \frac{100\ mN}{50\ km/s} = \frac{10^{-1}}{5 \cdot 10^4} \frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2 \cdot m} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{s}$$

- Brenndauer T:

$$T = \frac{M_S - M}{\dot{M}} = \frac{9 \cdot 10^3\ kg}{2 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{s}} = 4{,}5 \cdot 10^9\ s \approx 143\ y$$

Zurückgelegte Strecke s

- Geschwindigkeitsfunktion (siehe ↑ fdw 18):

$$v(t) = -v_0 ln\left(1 - \frac{\dot{M}}{M_S} t\right)$$

- Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad ds = v(t)dt \quad \rightarrow \quad s = \int v(t)dt$$

- Zurückgelegte Strecke der Raumsonde:

$$s = \int_0^T (-v_0) ln\left(1 - \frac{\dot{M}}{M_S} t\right) dt$$

Berechnung der zurückgelegten Strecke s

- Variablensubstitution:

$$\begin{aligned} x &:= 1 - \frac{\dot{M}}{M_S} t \\ dx &= -\frac{\dot{M}}{M_S} dt \\ dt &= -\frac{M_S}{\dot{M}} dx \end{aligned}$$

- Transformation der Integrationsgrenzen: $t \to x$

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\to \quad x = 1 \\ t = T \quad &\to \quad x = 1 - \frac{\dot{M}}{M_S} T = 1 - \frac{\dot{M}}{M_S} \frac{M_S - M}{\dot{M}} = \frac{M}{M_S} \end{aligned}$$

Berechnung der zurückgelegten Strecke s

- Zurückgelegte Strecke der Raumsonde:

$$s = \int_1^{\frac{M}{M_S}} (-v_0) \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{M_S}{\dot{M}}\right) dx = v_o \frac{M_S}{\dot{M}} \int_1^{\frac{M}{M_S}} \ln x \; dx$$

- Unbestimmtes Integral:

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - x + C$$

Berechnung der zurückgelegten Strecke s

- Ausführen der Integration:

$$\begin{aligned}
s &= v_0 \frac{M_S}{\dot{M}} \left[x \ln x - x + C\right]_1^{\frac{M}{M_S}} \\
&= v_0 \frac{M_S}{\dot{M}} \left(\frac{M}{M_S} \cdot \ln \frac{M}{M_S} - \frac{M}{M_S} - 1 \ln 1 + 1 \right) \\
&= v_0 \frac{M}{\dot{M}} \left(\ln \frac{M}{M_S} - 1 + \frac{M_S}{M} \right) \\
&= v_0 \frac{M}{\dot{M}} \left(\frac{M_S}{M} - 1 - \ln \frac{M_S}{M} \right)
\end{aligned}$$

- Einsetzen der konkreten Werte:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{5 \cdot 10^4 \ m/s \ 10^3 \ kg}{2 \cdot 10^{-6} kg/s} (10 - 1 - 2{,}3) \\
s &= 1{,}675 \cdot 10^{14} m \approx 1120 \ AE \approx 0{,}0177 \ Lj
\end{aligned}$$

Gesamtstrecke unter Berücksichtigung der Startgeschwindigkeit

- Ziel sei genau in tangentialer Richtung der Erdbewegung
- Erdbahngeschwindigkeit: $v_E \approx 30\ km/s$
- Fluchtgeschwindigkeit nach dem Start (mit anderen Triebwerken): $v_2 \approx 11\ km/s$
- $\rightarrow$ zusätzliche Strecke:

$$s_E + s_{v_2} = (v_E + v_2)T = 4{,}1 \cdot 10^4\ m/s \cdot 4{,}5 \cdot 10^9\ s = 1{,}845 \cdot 10^{14} m$$

- $\rightarrow$ Gesamtstrecke:

$$S = s + s_E + s_{v_2} = 3{,}52 \cdot 10^{14} m \approx 2353\ AE \approx 0{,}0372\ Lj$$