videowissen

Formel der Woche

Nr. 21

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

Ellipsen – das Marsbahn-Rätsel

Heliozentrisches Planetensystem

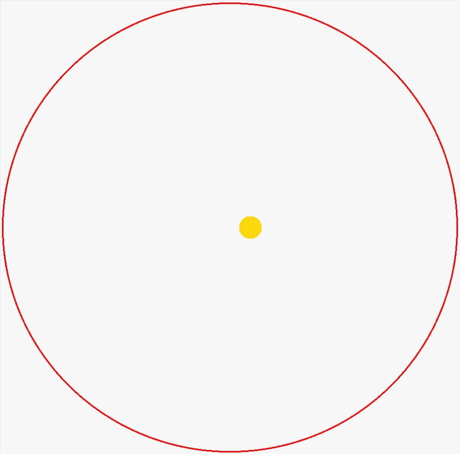
Tycho Brahe und Johannes Kepler

1546 – 1601 1571 – 1630

(c) Wikipedia

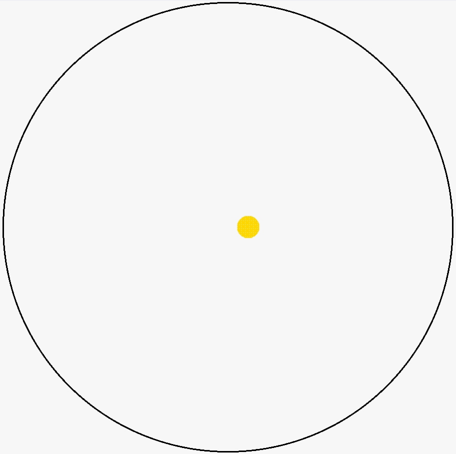
Marsbahn

Kreis oder Ellipse?

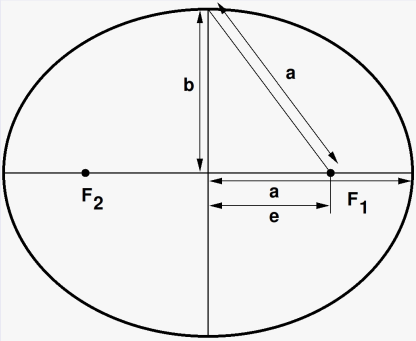


Marsbahn

Kreis oder Ellipse?



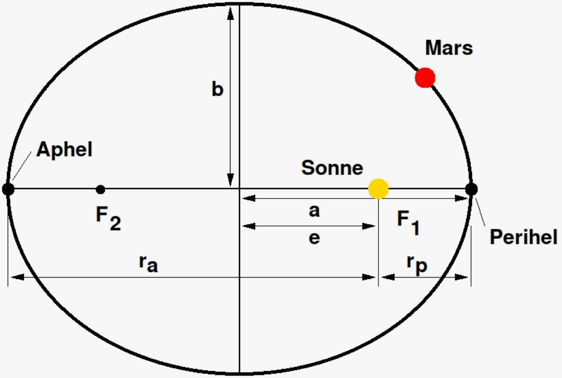
Die Merkmale



- F_1, F_2 – Brennpunkt der Ellipse
- a – Große Halbachse, b – Kleine Halbachse (s.a. ↑ fdw 8)
- e – lineare Exzentrizität, $\varepsilon := \frac{e}{a}$ – (numerische) Exzentrizität
- offenbar gilt: $a^2 = b^2 + e^2 = b^2 + \varepsilon^2 a^2 \rightarrow b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

Ellipsenbahn um die Sonne

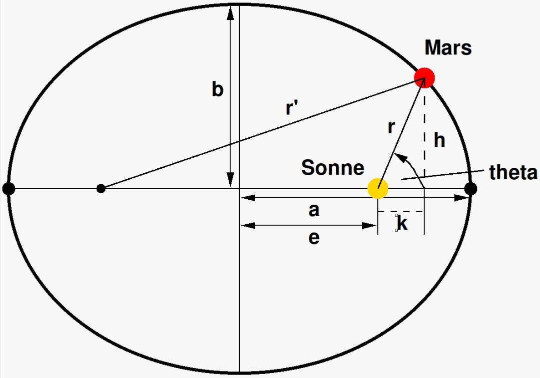
Beispiel Marsbahn (schematisch)



- Perihel – sonnennächster Punkt der Bahn (Periapsis)
- Aphel – sonnenfernster Punkt der Bahn (Apoapsis)
- r_p – Periheldistanz, r_a – Apheldistanz

Ellipsengleichung (bzgl. Brennpunkt)

Beispiel Marsbahn (schematisch)



- θ – (theta) wahre Anomalie (Winkelabstand vom Perihel aus)
- r – Abstand des Planeten (Mars) von der Sonne
- r', h - Hilfsgrößen

Ellipsengleichung (bzgl. Brennpunkt)

Beispiel Marsbahn (schematisch)

- man kann ablesen:

$$\sin\theta = \frac{h}{r} \to h = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{k}{r} \to k = r\cos\theta$$

- Pythagoras:

$$r'^2 = h^2 + (2e+k)^2 = r^2\sin^2\theta + (2\varepsilon a + r\cos\theta)^2$$

$$r'^2 = r^2\sin^2\theta + 4\varepsilon^2 a^2 + 4\varepsilon a r\cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

- mit $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ und $r + r' = 2a \to r' = 2a - r$

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4\varepsilon^2 a^2 + 4\varepsilon a r\cos\theta$$

$$a - r = \varepsilon^2 a + \varepsilon r\cos\theta$$

Ellipsengleichung (bzgl. Brennpunkt)

Beispiel Marsbahn (schematisch)

- weitere Umformung:

$$a - r = \varepsilon^2 a + \varepsilon r \cos\theta$$

$$a(1-\varepsilon^2) = r(1 + \varepsilon\cos\theta)$$

- Ellipsengleichung (bzgl. Brennpunkt):

$$\boxed{r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}}$$

- Folgerungen:
  Periheldistanz ($\theta = 0^\circ$): $r_p = a(1-\varepsilon)$
  Apheldistanz ($\theta = 180^\circ$): $r_a = a(1+\varepsilon)$

Wie groß ist ε der Marsbahn?

- aus Messungen:
  $r_p = 1{,}3814$ AU
  $r_a = 1{,}6660$ AU
- folgt:

$$a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = 1{,}5237 AU$$

$$\varepsilon = \frac{r_a}{a} - 1 = 0{,}0934$$

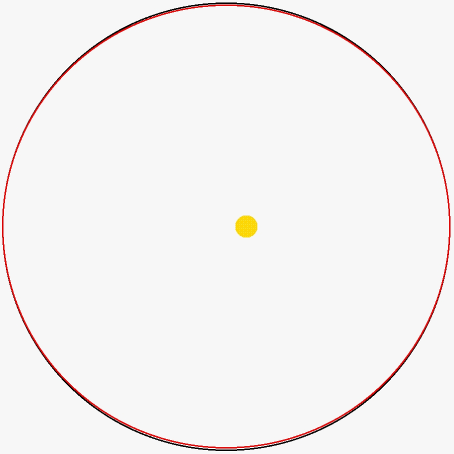
- Verhältnis der Halbachsen: aus

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

folgt

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0{,}996 = 1 - 0{,}4\%$$

Unterschied von Kreis und Ellipse



Was für eine Leistung von Brahe und Kepler!